



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 14 FEBRUARIE 2025

Clasa a VI-a

Barem de notare și evaluare

Subiectul I

PROBLEMA	1 (2p)	2 (2p)	3 (2p)	4 (2p)	5 (1p)	6 (1p)	7 (1p)	8 (1p)	9 (1p)	10 (1p)
Varianta corectă de răspuns	B	D	D	C	E	A	B	A	B	D

Subiectul al II-lea (7p)

Elementele fiecăreia dintre mulțimile finite A , B și C sunt numere naturale consecutive.

a) Dacă $A \cap B = \{2023\}$ și diferența dintre cel mai mare element din $A \cup B$ și cel mai mic element din $A \cup B$ este 2023, arătați că mulțimile A și B nu pot avea același număr de elemente.

b) Dacă cel mai mic element al mulțimii C este egal cu 1, aflați numărul n de elemente ale mulțimii C pentru care această mulțime conține exact 2024 de numere care se divid cu 2, dar nu se divid cu 6.

Rezolvare:

a) Presupunem că A și B au același număr de elemente

Scrie $A = \{2023, 2024, \dots, 2023 + n\}$1p

Scrie $B = \{2023 - n, 2023 - n + 1, \dots, 2023\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n < 2023$1p

Dar $(2023 + n - (2023 - n)) = 2023 \Rightarrow 2n = 2023$, adică $2 \nmid 2023$, contradicție...1p

b) Notând cu n cardinalul mulțimii C , dacă cel mai mic element al mulțimii C este 1, atunci

$C = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Numerele care sunt divizibile cu 2 și nu sunt divizibile cu 6 au forma $6k + 2$ sau $6k + 4$, unde



$k \in \mathbb{N}$ 1p

Dacă C conține 2024 de numere de formele considerate, atunci C conține exact 1012 numere de forma $6k + 2$ și 1012 numere de forma $6k + 4$ 1p

Atunci mulțimea C conține numerele $6 \cdot 0 + 2, 6 \cdot 0 + 4, 6 \cdot 1 + 2, 6 \cdot 1 + 4, \dots, 6 \cdot 1011 + 2, 6 \cdot 1011 + 4$ și nu conține numărul $6 \cdot 1012 + 2$, deci $6 \cdot 1011 + 4 = 6070 \leq n < 6074 = 6 \cdot 1012 + 2$, de unde rezultă că $n \in \{6070, 6071, 6072, 6073\}$ 2p

Subiectul al III-lea (7p)

În jurul punctului O considerăm unghiurile AOB , BOC , COD , DOE , EOF și FOA , având măsurile b, c, d, e, f , respectiv a , exprimate în grade, unde a, b, c, d, e, f sunt numere naturale nenule. Se știe că numerele a, b, c sunt direct proporționale cu 4, 5, 6, iar numerele c, d, e sunt invers proporționale cu 4, 5, 6. Determinați cea mai mică valoare posibilă pentru f .

Gazeta Matematică nr. 6-7-8 / 2024

Rezolvare: (nu este necesară realizarea figurii)

Dacă numerele c, d, e sunt invers proporționale cu 4, 5, 6 înseamnă că numerele c, d, e sunt direct proporționale cu inversele lor adică cu: $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

Obținem șirurile de rapoarte : $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$ și $\frac{c}{\frac{1}{4}} = \frac{d}{\frac{1}{5}} = \frac{e}{\frac{1}{6}}$ 1p

Înmulțind numitorii șirului de rapoarte egale de mai sus cu $[4, 5, 6] = 60$, obținem $\frac{c}{15} = \frac{d}{12} = \frac{e}{10}$.

Acum avem $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$ și $\frac{c}{15} = \frac{d}{12} = \frac{e}{10}$ 2p

Deoarece numărul c este comun vom lega cele 2 șiruri, astfel, înmulțim numitorii primului șir cu 5, și numitorii celui de-al doilea șir cu 2. Obținem: $\frac{a}{20} = \frac{b}{25} = \frac{c}{30}$ și $\frac{c}{30} = \frac{d}{24} = \frac{e}{20}$.

De aici rezultă că $\frac{a}{20} = \frac{b}{25} = \frac{c}{30} = \frac{d}{24} = \frac{e}{20} = k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este valoarea comună a

rapoartelor 2p

Cum $a^\circ + b^\circ + c^\circ + d^\circ + e^\circ + f^\circ = 360^\circ$, rezultă că $20k + 25k + 30k + 24k + 20k + f = 360$, adică $119k + f = 360$. Deducem că $119k \leq 360$, de unde $k \leq 3$. Atunci $f = 360 - 119k \geq 360 - 119 \cdot 3$, deci $f \geq 3$. Așadar, valoarea minimă a lui f este 3 care se obține pentru $k = 3$ (ceea ce revine la $a = 60, b = 75, c = 90, d = 72, e = 60$) 2p